El operador de momento $\hat{P}$

- $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$

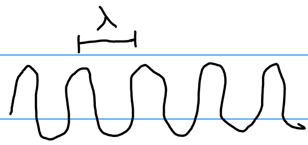
  1D: $P_x |p_x\rangle = p_x |p_x\rangle$

  3D: $P_x |\vec{p}\rangle = p_x |\vec{p}\rangle$ $\quad \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$

- Base de eigenvectores
  - $\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$
  - $\int d^3p \, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = \mathbb{1}$

¿Cómo se relacionan $\{|x\rangle\}$ y $\{|\vec{p}\rangle\}$ o $\hat{X}$ y $\hat{P}$?

La observación de deBroglie

$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \vec{p} = \hbar \vec{k}$ para onda plana 

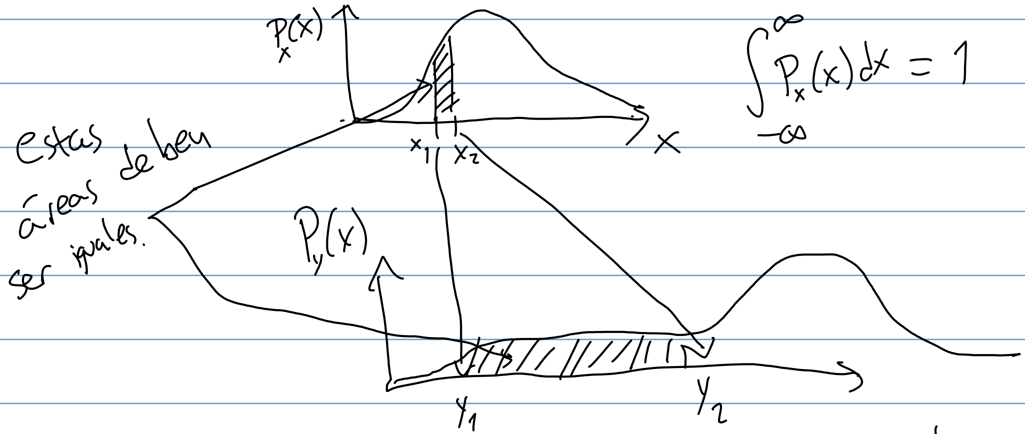
En general, podemos usar la transformada de Fourier para encontrar una relación entre la distribución de posiciones y la distribución de números de onda.

$$\Psi_k(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Psi_r(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, d^3r$$

$$\vec{r} \xleftrightarrow{\text{Fourier}} \vec{k} \xleftrightarrow{\text{de Broglie}} \vec{p}$$

Hay que tener cuidado al cambiar la variable de una función de densidad de probabilidad. No es correcto sólamente hacer la sustitución $\vec{k} \rightarrow \vec{p}/\hbar$

Cambio de variable en una función de densidad de probabilidad:



$$\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x)\,dx = 1$$

Si la queremos escribir en términos de otra variable $y = y(x)$ para obtener $P_y(y)$.

Se debe cumplir que

$$\int_{x_1}^{x} P_x(x')\,dx' = \int_{x_1}^{x} P_y(y(x'))\,dx'$$

Derivando respecto a x

$$\underline{P_x(x) = P_y(y(x))\frac{dy}{dx}}$$

$$P_x(x) = P_y(y(x))\frac{dy}{dx} \Rightarrow |\psi_k(k)|^2 = |\psi_p(p)|^2\frac{dp}{dk} \Rightarrow \psi_p(p) = \underbrace{\frac{1}{\hbar^{D/2}}}_{\text{dimensión}}\psi_k\left(\frac{p}{\hbar}\right)$$

Usando esto en 1D $p(k) = \hbar k \Rightarrow \psi_k(k) = \psi_p(p)\sqrt{\underbrace{\frac{dp}{dk}}_{\hbar}}$ Ponemos la $\sqrt{\ }$ porque $|\psi_x(x)|^2 = P_x(x)$

$$\psi_k(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \psi_x(x)e^{-ik\cdot x}\,dx \rightarrow \psi_p(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\psi_k\left(\frac{p_x}{\hbar}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \psi_x(x)\,e^{\frac{-ipx}{\hbar}}\,dx$$

$$\psi_p(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r\,\psi_r(\vec{r})\,e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (*)$$

$$\psi_p(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\int dx\,\psi_x(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}px} \quad \text{en 1D.}$$

¿Cómo interpretar $\psi_p(\vec{p})$?

La densidad de probabilidad de que la partícula tenga momento $\vec{p}$ es $|\psi_p(\vec{p})|^2 = |\langle p|\psi\rangle|^2$

Reescribiendo (*)

$$\langle \vec{p}\,|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r' \langle \vec{r}\,'|\psi\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\,'}$$

¿Cómo son $\psi_x(x)$ y $\psi_p(p)$ para una partícula con posición perfectamente definida?

e-vector de $\hat{X}$ con e-valor x_0.

para $|\psi\rangle = |x_0\rangle$ Partícula posicionada en x_0

$$\psi_p(p) = \langle p\,|\,x_0\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\int dx\, \overset{\delta(x-x_0)}{\langle x\,|\,x_0\rangle}\, e^{-\frac{i}{\hbar}px} = (2\pi\hbar)^{-1/2}\, e^{-\frac{i}{\hbar}px_0}$$

$$dP(p) = |\psi_p(p)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}\cancelto{1}{\left|e^{-\frac{i}{\hbar}px_0}\right|^2} = \frac{1}{2\pi\hbar}$$

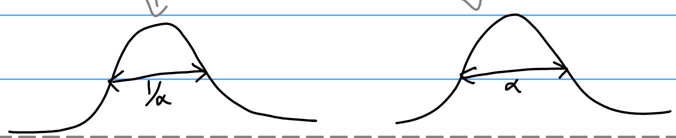
¡independiente de p!

Por otro lado $\psi(x) = \langle x|x_0\rangle = \delta(x-x_0)$

"Principio de incertidumbre" duración / tiempo

$$\mathcal{FT}\left[e^{-\frac{1}{2}\alpha t^2}\right] \sim e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}$$

entre más localizado en frecuencia, menos localizado en el tiempo



¿Cuál es el efecto de aplicar $\vec{R}$ y $\vec{P}$ a un vector $|\psi\rangle$?

Aplicar $\hat{X}$ en la base $\{|x\rangle\}$

$\langle x|X = x\langle x|$

$\hat{X}|\psi\rangle$ en la base de posición $\langle x|\hat{X}|\psi\rangle = x\langle x|\psi\rangle = x\psi(x)$

Los operadores hermitianos se pueden aplicar a la derecha o izquierda:

$\langle\alpha|A|\beta\rangle = \left(\langle\beta|A^{\dagger}|\alpha\rangle\right)^* = \left(\langle\beta|A|\alpha\rangle\right)^*$

$X|x\rangle = x|x\rangle$

$\langle x|X = x\langle x|$

En 3D
$$\langle\vec{r}|\hat{X}|\psi\rangle = x\langle\vec{r}|\psi\rangle = x\,\psi(\vec{r})$$
$$\langle\vec{r}|\vec{R}|\psi\rangle = \vec{r}\,\langle\vec{r}|\psi\rangle$$

Por ejemplo:

$$\langle\phi|\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{1}}}{}\hat{X}\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{1}}}{}|\psi\rangle = \iint dx\,dx'\,\overbrace{\langle\phi|x'\rangle}^{\phi^*(x')}\underbrace{\langle x'|\hat{X}|x\rangle}_{x\delta(x-x')}\overbrace{\langle x|\psi\rangle}^{\psi(x)}$$

$$= \int dx\ \phi^*(x)\,x\,\psi(x)$$

$$\langle\phi|\hat{x}|\psi\rangle = \int d^3r\ \phi^*(\vec{r})\,x\,\psi(\vec{r})$$

Aplicar $\hat{P}$ en la representación $\{|p\rangle\}$

$\hat{P}|\psi\rangle$ en la base de momento

$$\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = p\langle p|\psi\rangle = p\,\psi(p)$$

Aplicar $\hat{P}$ en la representación $\{|x\rangle\}$.

1D: $\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = \int dp \langle x|p\rangle\langle p|\hat{P}|\psi\rangle$

$$= (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \int dp\ p\,\psi_p(p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

Multiplicar por la variable en el espacio de Fourier (p) equivale a calcular la derivada en el espacio x.

$$\therefore \boxed{\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x)}$$

Transformada de Fourier de $p_x\psi_p(\mathbf{p})$ es $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}
\psi_r(\mathbf{r}) &= (2\pi\hbar)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,\psi_p(\mathbf{p})e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\
\frac{\partial}{\partial x}\psi_r(\mathbf{r}) &= (2\pi\hbar)^{-3/2}\frac{\partial}{\partial x}\int \mathrm{d}^3p\,\psi_p(\mathbf{p})e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\
&= (2\pi\hbar)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,\psi_p(\mathbf{p})\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\right) \\
&= (2\pi\hbar)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3p\,\psi_p(\mathbf{p})\left(\frac{i}{\hbar}p_x e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\right) \\
&= \mathcal{F}\left(\frac{i}{\hbar}p_x\psi_p(\mathbf{p})\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi_r(\mathbf{r}) = \mathcal{F}(p_x\psi_p(\mathbf{p}))$$

3D: $$\boxed{\begin{aligned}\langle \vec{r}|\vec{P}|\psi\rangle &= -i\hbar\nabla\langle\vec{r}|\psi\rangle \\ &= -i\hbar\nabla\psi(\vec{r})\end{aligned}}$$